Δήμογλου Κων/νος
Μαθηματικός (MSC)

Ένατο (ολικό) τεστ Μιγαδικές Συναρτήσεις Ι
Διάρκεια δυόμιση ώρες

Θέμα 1
Αν $\mathrm{Arg}(z_1) = \mathrm{Arg}(z_2)$, να αποδείξετε ότι $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ $(z_1, z_2 \neq 0)$.

Θέμα 2

(i) Να υπολογίσετε (αν υπάρχουν) τα όρια: $\lim_{z\to 0} z^z$ και $\lim_{z\to\infty} |e^z|$.

(ii) Να βρείτε τα $z \in \mathbb{C}$ για τα οποία η συνάρτηση $f(z) = \log\left(\dfrac{z-i}{z+i}\right)$ είναι μιγαδικά διαφορίσιμη.

Θέμα 3

(i) Να υπολογίσετε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_\gamma (z^2 + 3\sqrt[4]{z})dz$, όπου γ ο θετικά προσανατολισμένος μοναδιαίος κύκλος με κέντρο το 0, και $\sqrt[4]{z}$ εκείνος ο κλάδος της 4ης ρίζας του z για τον οποίο ισχύει $\sqrt[4]{1} = -i$.

(ii) Έστω f ακέραια, n φυσικός αριθμός και z ένας μιγαδικός αριθμός. Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς $a, b > 0$ ισχύει:

$$\frac{\int_0^{2\pi} e^{-int} f(z + ae^{it})dt}{\int_0^{2\pi} e^{-int} f(z + be^{it})dt} = \left(\frac{a}{b}\right)^n.$$

Θέμα 4

(i) Να βρεθούν όλες οι ακέραιες συναρτήσεις f που πληρούν το παρακάτω πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$f''(z) - f(z) = 0,\ f(0) = 0.\ f'(0) = 1.$$

(ii) Δίνεται η συνάρτηση $P(z) = z^2 - 3z + 3 + i$ και οι θετικά προσανατολισμένες περιφέρειες $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ των κύκλων $\partial D(0,1)$, $\partial D(0,2)$ και $\partial D(0,3)$. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

(a) $\displaystyle\int_{\gamma_1+2\gamma_2+\gamma_3} p(z)dz$

(b) $\displaystyle\int_{2\gamma_2} \frac{dz}{p(z)}$

(c) $\displaystyle\int_{\gamma_3^-} \frac{p(z)}{z-2}dz$

Θέμα 5

(i) Να χαρακτηριστεί το σημείο $z_0 = 1$ για τη συνάρτηση $f(z) := \dfrac{\sin(\pi z)}{2e^{z-1} - z^2 - 1}$, ως προς την ανωμαλία του.

(ii) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μη μηδενική ακολουθία $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μιγαδικών αριθμών τέτοια ώστε

$$\lim_n sin\left(\frac{2020}{z_n}\right) = 1 - i.$$

ΚΑΛΗ ΤΥΧΗ!!

Απαντήσεις (9ο Τεστ (ολικό) Μιγαδικές Συναρτήσεις Ι)

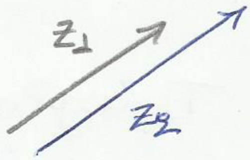
Δήμογλου Κων/νος
Μαθηματικός (MSc)

ΘΕΜΑ 1 :

Θέτουμε $\quad Arg(z_1) = Arg(z_2) := \theta \in (-\pi, \pi]$

Τότε, $\quad z_1 = |z_1| e^{i\theta} \quad$ και $\quad z_2 = |z_2| \cdot e^{i\theta}$

Άρα, $\quad \dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{|z_1|}{|z_2|} > 0$



Θέτουμε $\quad \dfrac{z_1}{z_2} = a > 0 \quad \Rightarrow \quad z_1 = a z_2$

$\Rightarrow \quad |z_1| = a |z_2|$

Επομένως, $\quad |z_1 + z_2| = |a z_2 + z_2| = |a+1| \cdot |z_2|$

$= (a+1) \cdot |z_2| = \left[\dfrac{|z_1|}{|z_2|} + 1 \right] |z_2|$

$= |z_1| + |z_2|.$

Δήμογλου Κων/νος
Μαθηματικός (MSc)

ΘΕΜΑ 8

i) Είναι, $z^z := e^{z\log z} = e^{z(\ln|z| + i\,\mathrm{Arg}\,z)}$

$$= e^{z\ln|z|} \cdot e^{iz\,\mathrm{Arg}\,z} \quad (1)$$

Ισχυρισμός 1 : $z\ln|z| \to 0$

Πράγματι, $|z\ln|z|| = |z|\,\ln|z| \overset{|z|:=x}{=\!=} x\ln x$

Άρα, $\lim\limits_{z\to 0} |z\ln|z|| = \lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$$

$$\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0$$

Ισχυρισμός 2 : $z\,\mathrm{Arg}\,z \to 0$

Πράγματι,

$$|z\,\mathrm{Arg}\,z| = |z|\cdot|\mathrm{Arg}\,z| \leq |z|\cdot\pi \xrightarrow{z\to 0} 0$$

Άρα, $|z\,\mathrm{Arg}\,z| \to 0.$

Δήμογλου Κων/νος
Μαθηματικός (MSc)

Συνεπώς, στη σχέση (1) παίρνουμε

$$\lim_{z\to 0} z^z = \lim_{z\to 0}\left(e^{z\ln|z|}\cdot e^{iz\operatorname{Arg}z}\right)$$

$$\overset{e^{(\cdot)}\ \text{συνεχ.}}{=\!=} e^{\lim_{z\to 0}(z\ln|z|)}\cdot e^{i\lim_{z\to 0}(z\operatorname{Arg}z)}$$

$$\underset{\text{Ισχ. 2}}{\overset{\text{Ισχ. 1}}{=\!=}} e^0\cdot e^{i0} = 1.$$

Το όριο $\lim_{z\to\infty}|e^z|$ δεν υπάρχει

Για $z_n = n$, $n\in\mathbb{N}$ ισχύει

$\lim_n z_n = \infty$ (αφού $|z_n|\to+\infty$)

αλλά $\lim_n e^{z_n} = \lim_n e^n = +\infty$.

Για $w_n = -n$, $n\in\mathbb{N}$ ισχύει

$\lim_n w_n = \infty$ (αφού $|w_n|\to+\infty$)

αλλά $\lim_n e^{w_n} = \lim_n e^{-n} = 0$

ii) Η συνάρτηση $\log\left(\frac{z-i}{z+i}\right)$ δεν είναι

$\mathbb{C}$-διαφορίσιμη σε εκείνα τα $z \in \mathbb{C}$ για

τα οποία ισχύει:

$$\mathrm{Re}\left(\frac{z-i}{z+i}\right) \leq 0 \quad \text{και} \quad \mathrm{Im}\left(\frac{z-i}{z+i}\right) = 0$$

Έχουμε,

$$\frac{z-i}{z+i} = \frac{(z-i)(\bar{z}+\bar{i})}{|z+i|^2} = \frac{(|z|^2-1)-2i\,\mathrm{Re}(z)}{|z+i|^2}$$

Άρα, η συνάρτηση f είναι $\mathbb{C}$-διαφορίσιμη

στο σύνολο:

$$\mathbb{C} \setminus \{ z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1, \ \mathrm{Re}(z) = 0 \}$$

ή ισοδύναμα στο σύνολο

$$\mathbb{C} \setminus \{ iy : y \in [-1,1] \}.$$

Δήμογλου Κων/νος
Μαθηματικός (MSC)

ΘΕΜΑ 3

$$\gamma(t) := e^{it}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

$$\int_\gamma \left(z^2 + 3\sqrt[4]{z} \right) dz := \int_0^{2\pi} \left(\gamma^2(t) + 3\sqrt[4]{\gamma(t)} \right) \gamma'(t)\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(e^{2it} + 3\sqrt[4]{e^{it}} \right) i e^{it}\, dt \qquad (1)$$

Είναι,

$$\sqrt[4]{e^{it}} = \underbrace{|e^{it}|}_{=1}{}^{1/4} \cdot e^{i\left(\frac{t+2k\pi}{4}\right)}, \quad k=0,1,2,3.$$

Για $t=0$: $\sqrt[4]{e^{i0}} = \sqrt[4]{1} = e^{i\frac{k\pi}{2}}$, $k=0,1,2,3$

Όταν το $k=3$, $\sqrt[4]{1} = e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i$

οπότε, δεχόμαστε μόνο τον $4^{ο}$ κλάδο της $\sqrt[4]{e^{it}}$.

Δήμογλου Κων/νος
Μαθηματικός (MSc)

Επομένως, στη σχέση (1) συνάγουμε:

$$\int_\gamma \left(z^2 + 3\sqrt[4]{z}\right) dz := \int_0^{2\pi} \Big(e^{2it} + 3\underbrace{e^{i\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{t}{4}\right)}}_{=e^{i\frac{3\pi}{2}}\cdot e^{i\frac{t}{4}}} \Big) i e^{it}\, dt$$

$$= i \cdot \int_0^{2\pi} \left(e^{3it} + 3(-i)\cdot e^{i\frac{5t}{4}} \right) dt$$

$$= i \left[\int_0^{2\pi} e^{3it}\, dt - 3i \int_0^{2\pi} e^{i\frac{5t}{4}}\, dt \right]$$

$$= i \left[\frac{1}{3i} e^{3it} \right]_0^{2\pi} + 3 \cdot \left[\frac{4}{5} \cdot \frac{1}{i} e^{i\frac{5}{4}t} \right]_0^{2\pi}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{3}\left(\cancel{e^{6\pi i}}^{\,1} - \cancel{e^{0}}^{\,1} \right)}_{=0} - \frac{12}{5} i \left(e^{i\frac{5}{2}\pi} - \cancel{e^{0}}^{\,1} \right)$$

$$= -\frac{12}{5} i \left\{ \left(e^{i\frac{\pi}{2}} \right)^5 - 1 \right\}$$

$$= -\frac{12}{5} i \left(i^5 - 1 \right) = -\frac{12}{5} i (i - 1)$$

$$= \frac{12}{5} (i + 1).$$

Δήμογλου Κων/νος
Μαθηματικός (MSc)

ii) ΘΔο

$$\frac{\int_0^{2\pi} e^{-int}\cdot f(z+ae^{it})\,dt}{\int_0^{2\pi} e^{-int}\cdot f(z+be^{it})\,dt} = \left(\frac{a}{b}\right)^n .$$

Το θεώρημα της μέσης τιμής του Cauchy

δηλώνει ότι:

$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z+ae^{it})\,dt$ όταν έχουμε

έναν δίσκο $\overline{D}(z,a)$, $a>0$.

Και εδώ σκεφτόμαστε ανάλογα. Έχουμε:

$$\int_0^{2\pi} e^{-int}\cdot f(z+ae^{it})\,dt =$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{f(z+ae^{it})}{(e^{it})^n}\cdot dt =$$

Δήμογλου Κων/νος
Μαθηματικός (MSC)

$$\int_0^{2\pi} \frac{f(z+ae^{it})}{i(z+ae^{it}-z)^{n+1}} \, a^{n+1} \cdot i e^{it} \, dt \stackrel{a \cdot a^n}{:=}$$

$$\int_{\gamma_1} \frac{a^n \cdot f(\zeta)}{i(\zeta - z)^{n+1}} \, d\zeta = \frac{a^n}{i} \int_{\gamma_1} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}} \, d\zeta$$

$$\underset{f \text{ ακέραια}}{\overset{\text{Τύπος Cauchy}}{=\!=}} \quad \frac{a^n}{i} \cdot \frac{f^{(n)}(z)}{n!} \cdot 2\pi i \quad , \quad \text{όπου}$$

$\gamma_2(t) = z + ae^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Όμοια τώρα

$$\int_0^{2\pi} e^{-int} f(z+be^{it}) \, dt = \frac{b^n}{i} \int_{\gamma_2} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}} \, d\zeta$$

$$\underset{f \text{ ακέραια}}{\overset{\text{Τύπος Cauchy}}{=\!=}} \quad \frac{b^n}{i} \cdot \frac{f^{(n)}(z)}{n!} \cdot 2\pi i \quad , \quad \text{όπου}$$

$\gamma_2(t) = z + be^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$

Άρα,
$$\frac{\int_0^{2\pi} e^{-int} f(z+ae^{it}) \, dt}{\int_0^{2\pi} e^{-int} f(z+be^{it}) \, dt} = \left(\frac{a}{b}\right)^n .$$

Δήμογλου Κων/νος

Μαθηματικός (MSc)

ΘΕΜΑ 4 :

i) Εφόσον f ακέραια ισχύει

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n, \quad z \in \mathbb{C}$$

Από το Θεώρημα παραγώγισης δυναμοσειράς την εξίσωση $f''(z) = f(z)$ και τη μοναδικότητα του αναπτύγματος, έχουμε:

$$f''(z) = f(z) \Leftrightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{(n-2)!} z^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n+2)}(0)}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$$

$$\Leftrightarrow \frac{f^{(n+2)}(0)}{n!} = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}, \quad \forall n = 0, 1, \ldots$$

$$\Leftrightarrow f^{(n+2)}(0) = f^{(n)}(0), \quad \forall n = 0, 1, \ldots$$

Από τις αρχικές συνθήκες παίρνουμε

Δήμογλου Κων/νος
Μαθηματικός (MSc)

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} 1 , & n = 2k+1 \\ 0 , & n = 2k \end{cases} , \quad k = 0, 1, \ldots$$

Άρα, $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!}$, $z \in \mathbb{C}$.

ii) $P(z) = z^2 - 3z + 3 + i$

α) $\int_{\gamma_1 + 2\gamma_2 + \gamma_3} p(z)\,dz =$

$$\int_{\gamma_1} p(z)\,dz + \int_{2\gamma_2} p(z)\,dz + \int_{\gamma_3} p(z)\,dz =$$

$$\int_{\gamma_1} p(z)\,dz + 2 \cdot \int_{\gamma_2} p(z)\,dz + \int_{\gamma_3} p(z)\,dz = 0$$

γιατί, τα επιμέρους ολοκληρώματα κάνουν μηδέν, επειδή η ακεραία $p(z)$ και μάλιστα ολοκληρώσιμη (δηλ. έχει παράγουσα)

Δήμογλου Κων/νος
Μαθηματικός (MSC)

και οι $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ κλειστές καμπύλες.

b) Γράφουμε το $p(z)=z^2-3z+3+i$

σε παραγοντοποιημένη μορφή. Θα βρούμε

λοιπόν τις ρίζες του.

$\Delta = 9-4\cdot(3+i) = -3-4i$, Θέτω $w=a+ib$.

$(a+ib)^2 = -3-4i \iff a^2-b^2+i2ab = -3-4i$

$$\left\{\begin{array}{l} a^2-b^2=-3 \\ ab=-2 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} (a^2-b^2)^2=9 \\ a^2\cdot b^2=4 \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} a^4+b^4-2a^2\cdot b^2=9 \\ a^2\cdot b^2=4 \end{array}\right. \overset{(+)}{\Rightarrow} (a^2+b^2)^2=25 \Rightarrow$$

$$a^2+b^2=\pm 5 \xrightarrow{a^2+b^2>0} a^2+b^2=5. \quad (1)$$

Επίσης, $a^2-b^2=-3$. (2)

Δήμογλου Κων/νος

Μαθηματικός (MSC)

Από τις (1) & (2) $\xrightarrow{(+)}$ $2a^2 = 2 \Rightarrow a = \pm 1$

Από τις (1) & (2) $\xrightarrow{(-)}$ $2b^2 = 8 \Rightarrow b = \pm 2$

Άρα, $w_1 = 1-2i$, $w_2 = -1+2i$ (επειδή, $2ab = -4$).

Άρα, $$z_{1,2} = \frac{3 \pm (1-2i)}{2} = \begin{cases} z_1 = 2-i \\ z_2 = 1+i \end{cases}$$

Οπότε, $p(z) = (z-2+i)(z-1-i)$

Έχουμε λοιπόν

$$\int_{3\gamma_2} \frac{1}{p(z)}\,dz = 3 \cdot \int_{\gamma_2} \frac{1}{(z-2+i)(z-1-i)}\,dz =$$

$$\int_{\gamma_2} \frac{3}{(z-2+i)(z-1-i)}\,dz = \int_{\gamma_2} \frac{f(z)}{z-1-i}\,dz,$$ όπου

Δήμογλου Κων/νος
Μαθηματικός (MSC)

$$f(z) = \frac{3}{z-2+i}, \quad \text{ολόμορφη στο } \mathbb{C} \setminus \{2-i\}$$

και μάλιστα $\overline{D}(0,2) \subseteq \mathbb{C} \setminus \{2-i\}$, αφού

$|2-i| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5} > 2$. Επίσης,

$1+i \in D(0,2)$, αφού $|1+i| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} < 2$.

Άρα, απ' τον τύπο του Cauchy, έπεται:

$$\int_{\gamma_2} \frac{f(z)}{z-1-i} dz = f(1+i)\, 2\pi i = \frac{6\pi i}{-1+2i}.$$

c) $$\int_{\gamma_3^-} \frac{P(z)}{z-2} dz = -\int_{\gamma_3} \frac{P(z)}{z-2} dz =$$

$$-2\pi i\, P(2) = -2\pi i \cdot i(1-i) = -2\pi i(1+i).$$

(Τύπος Cauchy, $2 \in D(0,3)$).

Δήμογλου Κων/νος
Μαθηματικός (MSc)

ΘΕΜΑ 5

i) Θδο η $f(z) = \dfrac{g(z)}{(z-1)^m}$, για κάποια

g ολόμορφη στο σημείο 1 και $g(1) \neq 0$.

και κάποιο κατάλληλο $m \in \mathbb{N}_0$.

Παρατηρούμε ότι ο αριθμητής γράφεται ως

$$\sin(\pi z) = \sin(\pi - \pi z) = -\sin \pi(z-1)$$

$$= -\pi(z-1) + \frac{(\pi(z-1))^3}{3!} - \frac{(\pi(z-1))^5}{5!} + \dots$$

$$= \pi(z-1)\left(1 + \frac{(\pi(z-1))^2}{3!} - \frac{(\pi(z-1))^4}{5!} + \dots\right).$$

γεγονός που σημαίνει ότι για τον αριθμητή

το σημείο $z=1$ είναι ρίζα τάξης 1.

Επίσης, ο παρονομαστής γράφεται ως.

Δήμογλου Κων/νος

Μαθηματικός (MSC)

$$2e^{z-1}-z^2-1 = 2\left(1+(z-1)+\frac{(z-1)^2}{2!}+\frac{(z-1)^3}{3!}+\dots\right)-z^2-1$$

$$= 1-z^2+2\left((z-1)+\frac{(z-1)^2}{2!}+\frac{(z-1)^3}{3!}+\dots\right)$$

$$= (z-1)\left(-1-z+2+\frac{2}{2!}(z-1)+\frac{2}{3!}(z-1)^2+\dots\right)$$

$$= (z-1)^2\left(\cancel{-1}+\cancel{1}+\frac{2}{3!}(z-1)+\frac{2}{4!}(z-1)^2+\dots\right)$$

$$= (z-1)^3\left(\frac{2}{3!}+\frac{2}{4!}(z-1)+\dots\right)$$

Επομένως, για τον παρονομαστή το $z=1$ αποτελεί ρίζα τάξης 3.

Οπότε, γράφουμε:

$$f(z)=\frac{\pi(z-1)\left(-1+\frac{(\pi(z-1))^2}{3!}-\frac{(\pi(z-1))^3}{5!}+\dots\right)}{(z-1)^3\cdot\left(\frac{2}{3!}+\frac{2}{4!}(z-1)+\dots\right)}$$

$g(z)$

$$=\frac{g(z)}{(z-1)^2},$$ όπου g ολόμορφη στο σημείο 1 και $g(1)=-3\pi\neq 0$

Δήμογλου Κων/νος
Μαθηματικός (MSC)

Άρα, το $z=1$ είναι πόλος της f, τάξης 2.

ii) Θέτουμε $f(z) = \sin\left(\frac{2020}{z}\right)$, $z \neq 0$

Το $z=0$ ουσιώδες ανώμαλο σημείο της f.

Επειδή,

$1^{ον}$) $\lim_{z \to 0} f(z) \neq \infty$, αφού για

$z_n = \frac{1}{n\pi}$, $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $z_n \to 0$

αλλά $\lim_n f(z_n) = \lim_n \sin(2020 n\pi) = 0 \neq \infty$

Άρα, το 0 δεν είναι πόλος της f

$2^{ον}$) Η f δεν είναι φραγμένη κοντά στο σημείο 0. Για $z_n = \frac{2020}{in}$, $n \in \mathbb{N}$

$z_n \to 0$, $f(z_n) = \sin\left(\frac{\cancel{2020}}{\frac{\cancel{2020}}{in}}\right) = \sin(in)$

$= \frac{e^{i(in)} - e^{-i(in)}}{2i} = i \cdot \sinh(n) \xrightarrow{n} \infty$

Δήμογλου Κων/νος
Μαθηματικός (MSC)

Άρα, το 0 όχι επουσιώδες ανώμαλο της f

Συνεπώς, $z=0$ ουσιώδες ανώμαλο της f

ii) Απ' το Θεώρημα Casorati – Weierstrass

για $z_0 = 1-i$, λόγω πυκνότητας

της εικόνας του $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ στο $\mathbb{C}$

μέσω της f, $z_0 \in \overline{f(\mathbb{C}\setminus\{0\})}$

δηλαδή, $\exists\ (z_n) \subset \mathbb{C}\setminus\{0\} : f(z_n) \to z_0$

ή αλλιώς $\lim_n \sin\left(\frac{2020}{z_n}\right) = 1-i$.

Δήμογλου Κων/νος
Μαθηματικός (MSC)